2001 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题详解及评析

一、填空题

（1） $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$_____.

【答】 $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

【详解】 $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{2(1-x)}{(x-1)(x+2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to1}\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{-\sqrt{2}}{6}\cdot$$

(2)设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为_____.

【答】 $x-2y+2=0.$

【详解】在等式 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 两边对 x 求导,得
$$e^{2x+y}\cdot\left(2+y'\right)+\sin(xy)\cdot\left(y+xy'\right)=0,$$
将 $x=0,y=1$ 代入上式,得 $y'(0)=-2.$ 故所求法线方程为
$$y-1=\frac{1}{2}x,$$
即 $$x-2y+2=0.$$

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2x\right)\cos^2xdx=$_____.

【答】 $\dfrac{\pi}{8}$

【详解】 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上, $x^3\cos^2x$ 是奇函数, $\sin^2x\cos^2x$ 是偶函数,

故

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2 x\right)\cos^2 xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3\cos^2 x+\sin^2 x\cos^2 x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2xdx$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx$$

$$=\frac{\pi}{8}.$$

(4)过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$且满足关系式$y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$的曲线方程为______.

【答】 $y\arcsin x=x-\frac{1}{2}.$

【详解】 方法一:

原方程$y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$可改写为

$$\left(y\arcsin x\right)'=1,$$

两边直接积分,得

$$y\arcsin x=x+c.$$

又由$y\left(\frac{1}{2}\right)=0$,解得$c=-\frac{1}{2}.$

故所求曲线方程为：

$$y\arcsin x=x-\frac{1}{2}.$$

方法二:

将原方程写成一阶线性方程的标准形式

$$y'+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}y=\frac{1}{\arcsin x}.$$

解得$y=e\ e^{-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx}\left[c+\int\frac{1}{\arcsin x}e^{\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx}dx\right]=\frac{1}{\arcsin x}\left(c+x\right),$

$$y\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow c=-\frac{1}{2}.$$

故曲线方程为：

$$y\arcsin x=x-\frac{1}{2}.$$

(5)设方程$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$有无穷多个解,则$a=$______.

【答】 -2

【详解】 方法一:

利用初等行变换化增广矩阵为阶梯形,有

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \vdots & -2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 1+2a \end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & -2 \\ 0 & a-1 & (a-1) & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & \vdots & 2(a+2) \end{bmatrix},$$

可见,只有当$a=-2$时才有秩$r\left(\overline{A}\right)=r(A)=2<3$,对应方程组有无穷多个解.

方法二:

当系数矩阵的行列式不为零时,方程组有唯一解,因此满足题设条件的a一定使系数行列式为零,即有

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2=0,$$

解得$a=-2$或$a=1$.

由于答案有两个,应将其带回原方程进行检验.显然,当$a=1$时,原方程无解,因此只能是$a=-2$.

二、选择题

(1) 设$f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$,则$f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}$等于

(A) 0.

(B) 1.

(C) $\begin{cases} 1, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 0, & |x|\le 1, \\ 1, & |x|>1. \end{cases}$

【 】

【答】 应选(B).

【详解】 因为$|f(x)|\le 1$,

于是 $f\left[f(x)\right]=1$,

从而 $f\left\{f\left[(x)\right]\right\}=1$.

故正确选项为(B).

(2)设当 $x \to 0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小, $x\sin x^n$ 是比 $\left(e^{x^2}-1\right)$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

【 】

【答】 应选(B).

【详解】 由题设,知

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}{x\cdot x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-3}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^{3-n}=0.$$

n应满足 $n\le 2$;

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{n+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}=0,$

知 $n\ge 2$. 故 $n=2$.

因此正确选项为(B).

(3)曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

【 】

【答】 应选(C).

【详解】 因为

$$y'=4(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$y''=4(3x^2-12x+11),$$

$$y'''=24(x-2).$$

令 $y''=0$, 即 $3x^2-12x+11=0$, 因为 $\Delta=12^2-4\cdot 3\cdot 11=12>0$, 所以 $y^{n}=0$ 有两个根,且不为 2 ,因在此两点处,三阶导数 $y'''\ne 0$, 因此曲线有两个拐点.

故正确选项为(C).

(4) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数, $f'(x)$ 严格单调减少, 且 $f(1)=f'(1)=1$, 则

(A)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$.

(B)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$.

(C)在$\left(1-\delta,1\right)$内，$f\left(x\right)<x$, 在$\left(1,1+\delta\right)$内，$f\left(x\right)>x.$

(D)在$\left(1-\delta,1\right)$内, $f\left(x\right)>x$, 在$\left(1,1+\delta\right)$内，$f\left(x\right)<x.$

【 】

【答】 应选(A).

【详解】 方法一：

令$F\left(x\right)=f\left(x\right)-x,$

则$F'\left(x\right)=f'\left(x\right)-1=f'\left(x\right)-f'\left(1\right),$

由于 $f'\left(x\right)$严格单调减少,

因此当$x\in\left(1-\delta,1\right)$时，$F'\left(x\right)<0$, 且在$x=1$处，$F'\left(1\right)=0.$

可见$F\left(x\right)$在$x=1$处取极大值，即在$\left(1-\delta,1\right)$和$\left(1,1+\delta\right)$内均有$F\left(x\right)<F\left(1\right)=0,$

也即 $f\left(x\right)<x.$

故正确选项为（A）.

方法二：

因为 $f'\left(x\right)$严格单调减少,且 $f'\left(1\right)=1,$

则在$\left(1-\delta,1\right)$内，$f'\left(x\right)>f'\left(1\right)=1$

在$\left(1,1+\delta\right)$内，$f'\left(x\right)<1$；

从而在$\left(1-\delta,1\right)$内任一x, 有

$$\int_x^1 f'\left(t\right)dt>\int_x^1 1dt,$$

即 $f\left(1\right)-f\left(x\right)>1-x,\ f\left(1\right)=1\Rightarrow f\left(x\right)<x.$

而对$\left(1,1+\delta\right)$内任一x, 有

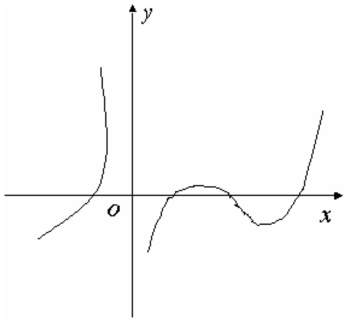
$$\int_1^x f'\left(t\right)dt<\int_1^x 1dt,$$

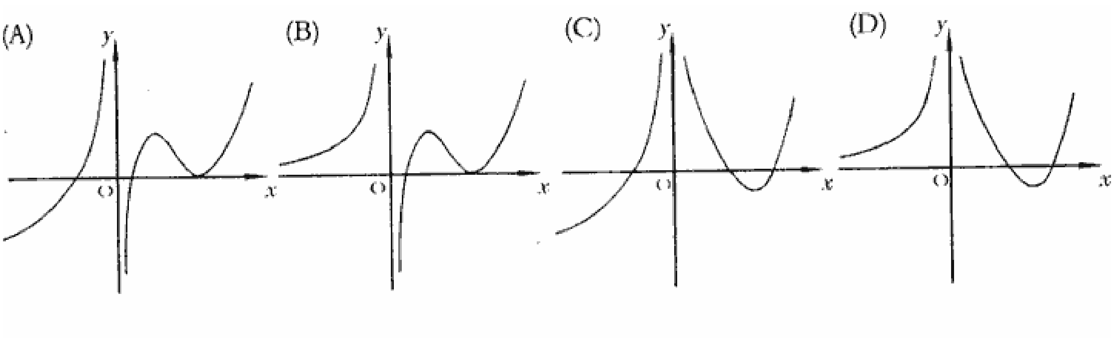
即

$$f\left(x\right)<x.$$

故选（A）.

（5） 设函数$f\left(x\right)$在定义域内可导，$y=f\left(x\right)$的图形如右图所示，则导函数$y=f'\left(x\right)$的图形为





【 】

【答】应选（D）

【详解】 从题设图形可见，在 y 轴的左侧，曲线 $y=f(x)$ 是严格单调增加的，因此当 $x<0$ 时，一定有 $f'(x)>0$ 对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，由此可排除（A），（C）；

又 $y=f(x)$ 的图形在 y 轴右侧有三个零点，因此由罗尔中值定理知，其导函数 $y=f'(x)$ 图形在 y 轴一定有两个零点，进一步可排除（B）.

故正确答案为（D）.

三、求 $\int\frac{dx}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

【详解】设 $x=\tan t$, 则 $dx=\sec^2 t$.

$$原式=\int\frac{\sec^2 tdt}{\sec t\cdot\left(2\tan^2 t+1\right)}=\int\frac{\cos tdt}{2\sin^2 t+\cos^2 t}=\int\frac{d\sin t}{1+\sin^2 t}$$

$$=\arctan\left(\sin t\right)+C$$

$$=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C.$$

四、求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

【详解】方法一：

$$原式=\lim_{t\to x}\left[1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right]^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}},$$

即 $\qquad f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}},$

显然 $f(x)$ 的间断点为：

$$x=0, x=k\pi\left(k=\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e,$

所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类（或可去）间断点；

而 $\lim\limits_{x\to(k\pi)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(k\pi)^-}e^{\frac{x}{\sin x}}$ 与 $\lim\limits_{x\to(k\pi)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(k\pi)^+}e^{\frac{x}{\sin x}}$ 均不存在，

故 $x=k\pi\left(k=\pm1,\pm2,\cdots\right)$ 是函数 $f(x)$ 的第二类（或无穷）间断点.

方法二：

$$原式=\lim_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}=\frac{x}{\sin x},$$

故 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$

求间断点并指出其类型同方法一.

五、设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geq1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\dfrac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值.（在直角坐标系下曲率公式为 $K=\dfrac{\left|y''\right|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$）

【详解】 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}},$

抛物线在点 $M(x,y)(x\geq1)$ 处三维曲率半径

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{K}=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|y''\right|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

抛物线上 $\overset{\frown}{AM}$ 的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}dx=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx,$$

故 $$\frac{d\rho}{ds}=\frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{\pi}$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dx}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}}$$

因此 $$3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}=\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2=3\cdot\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9$$

六、设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$, 且其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$, 求 $f(x)$.

【详解】 等式两边对 x 求导得

$$g\left[f(x)\right]f'(x)=2xe^x+x^2e^x$$

而 $$g\left[f(x)\right]=x,$$

故 $$xf'(x)=2xe^x+x^2e^x.$$

当 $x\neq 0$ 时，有

$$f'(x)=2e^x+xe^x$$

积分得 $$f(x)=(x+1)e^x+C$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故有

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[(x+1)e^x+C\right]=0,$$

得 $$C=-1$$

因此 $$f(x)=(x+1)e^x-1.$$

七、设函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x),g'(x)=2e^x-f(x)$, 且 $f(0)=0,g(0)=2$, 求 $\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx.$

【详解】 方法一：

由 $$f''(x)=g'(x)=2e^{x}-f(x),$$

于是有

$$\begin{cases} f''(x)+f(x)=2e^{x}, \\ f(0)=0, \\ f'(0)=2, \end{cases}$$

解得

$$f(x)=\sin x-\cos x+e^{x}.$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx&=\int_0^{\pi}\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx\\&=\int_0^{\pi}\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^{\pi}d\left[\frac{f(x)}{1+x}\right]\\&=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)\\&=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}\end{aligned}$$

方法二：

如方法一先求出 $f(x)$ 的表达式，再用分部积分法求定积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx&=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\int_0^{\pi}f(x)d\left(\frac{1}{1+x}\right)\\&=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{1+x}dx\\&=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)+\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx-\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx\\&=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}\end{aligned}$$

八、设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

（1） 试求曲线 L 的方程；

（2） 求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

【详解】（1）设曲线 L 上过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$，则得该切线

在 y 轴上的截距为 $y-xy'$,

由题设知 $\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$,

此为一阶齐次微分方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$, 将此方程化为

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x},$$

解得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C,$$

由 L 经过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 知

$$C=\frac{1}{2},$$

于是 L 的方程为：

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2},$$

即

$$y=\frac{1}{4}-x^2.$$

（2）设第一象限内曲线 $y=\dfrac{1}{4}-x^2$. 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x),$$

即

$$Y-(-)=-2xX+x^2+\frac{1}{4}\left(0<x\le\frac{1}{2}\right)$$

它与 x 轴及 y 轴的交点分别为 $\left[\dfrac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},0\right],\left(0,x^2+\dfrac{1}{4}\right)$,

所求面积：

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)dx.$$

令 $S'(x)=0$，得

$$x=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$S'(x)<0;$

$x > \frac{\sqrt{3}}{6}$时，$S^{'}\left(x\right) > 0;$

因而$x = \frac{\sqrt{3}}{6}$是$S\left(x\right)$在$\left(0, \frac{1}{2}\right)$内唯一极小值点，即最小值点.

于是所求切线为：

$$Y = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} X + \frac{3}{36} + \frac{1}{4}, \text{即} Y = -\frac{\sqrt{3}}{3} X + \frac{1}{3}$$

九、一个半球体状得雪堆，其体积融化的速率与半球面面积S成正比，比例常数$K > 0$.假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为r_0的雪堆开始融化的 3 小时内，融化了其体积的$\frac{7}{8}$,问雪堆全部融化需要多少小时？

【详解】

方法一：

设雪堆在时刻t的体积$V = \frac{2}{3}\pi r^3$,表面积$S = 2\pi^2 r^2$,r为时间t的函数，

由题设知

$$\frac{dV}{dt} = -KS,$$

即 $$2\pi^2 r^2 \frac{dr}{dt} = -2\pi K r^2,$$

于是$\frac{dr}{dt} = -K,$

积分得 $r = -Kt + C,$

由$r\left(0\right) = r_0$,得 $r = r_0 - kt,$

又由题设，

$$V\left(3\right) = \frac{1}{8} V\left(0\right),$$

即 $$\frac{2}{3}\pi\left(r_0 - 3K\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}\pi r_0{}^3,$$

有 $$K = \frac{1}{6} r_0$$

从而 $$r = r_0 - \frac{1}{6} r_0 t.$$

因雪球全部融化时，$r = 0$，故得$t = 6,$

即雪球全部融化需要 6 小时.

方法二：

这雪堆在时刻t的体积$V=\frac{2}{3}\pi r^3$, 表面积$S=2\pi^2 r^2$, 从而$S=\sqrt[3]{18\pi V^2}$

由题设知

$$\frac{dV}{dt}=-KS=-\sqrt[3]{18\pi V^2}$$

即
$$\frac{dV}{V^{\frac{2}{3}}}=-\sqrt[3]{18\pi}Kdt,$$

积分得
$$3\sqrt[3]{V}=3\sqrt[3]{V_0}+C.$$

设$V(0)=V_0$,

得$C=3\sqrt[3]{V_0}$.

故
$$3\sqrt[3]{V}=3\sqrt[3]{V_0}-\sqrt[3]{18\pi}Kt,$$

又由$V(3)=\frac{1}{8}V_0$，得

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{V_0}=3\sqrt[3]{V_0}-\sqrt[3]{18\pi}K,$$

从而
$$K=\frac{\sqrt[3]{V_0}}{2\sqrt[3]{18\pi}},$$

故

$$3\sqrt[3]{V}=3\sqrt[3]{V_0}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{V_0}t.$$

当$V=0$时，得$t=6,$

即雪球全部融化需要 6 小时.

十、设$f(x)$在区间$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数，$f(0)=0,$

（1） 写出$f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

（2） 证明在$[-a,a]$上至少存在一点η,使得

$$a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx.$$

【详解】（1）对任意$x\in[-a,a]$，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$（其中ξ在 0 与x之间）

（2）

$$\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = \int_{-a}^{a} f^{'}\left(0\right)xdx + \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{2!} f^{''}\left(\xi\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x^2 f^{''}\left(\xi\right)dx$$

因为 $f^{''}\left(x\right)$ 在 $\left[-a,a\right]$ 上连续，故对任意的 $x \in \left[-a,a\right]$，有 $m \le f^{''}\left(x\right) \le M$,

其中 M,m 分别为 $f^{''}\left(x\right)$ 在 $\left[-a,a\right]$ 上的最大值，最小值

于是有

$$m\int_{0}^{a} x^2 dx \le \int_{-a}^{a} f\left(x\right)xdx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x^2 f^{''}\left(\xi\right)dx \le M\int_{0}^{a} x^2 dx$$

即

$$m \le \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f\left(x\right)xdx \le M$$

十一、已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AXA + BXB = AXB + BXA + E$,其中 E 是三阶单位矩阵，求 X.

【详解】 由设关系，有

$$AX\left(A-B\right) + BX\left(B-A\right) = E,$$

即 $$\left(A-B\right)X\left(A-B\right) = E$$

由于行列式 $$\left|A-B\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq$$

所以矩阵 $A-B$ 可逆.

而 $$\left(A-B\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故 $$X = \left[\left(A-B\right)^{-1}\right]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

十二、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，若 $\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1$，讨论实数 t 满足什么关系时，

$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是$AX=0$的一个基础解系.

【详解 1】由于$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$均为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$均为$AX=0$的解.

下面证明$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关.

设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$,

即

$$\left(k_1+tk_4\right)\alpha_1+\left(tk_1+k_2\right)\alpha_2+\left(tk_2+k_3\right)\alpha_3+\left(tk_3+k_4\right)\alpha_4=0,$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，因此其系数全为零，

即

$$\begin{cases} k_1+tk_4=0, \\ tk_1+k_2=0, \\ tk_2+k_3=0, \\ tk_3+k_4=0 \end{cases}$$

其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix}=1-t^4$

可见，当$1-t^4\neq 0$时，即$t\neq\pm 1$时，上述方程组只有零解$k_1=k_2=k_3=k_4=0$,

因此向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关.

从而$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$是线性方程组$AX=0$的一个基础解系.

【详解 2】由题设向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示，且有

$$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{bmatrix},$$

可见，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示的充要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^4$$

即当$t \neq \pm 1$时，向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$与向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$等价，

从而向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$线性无关，

因此也为$AX = 0$的一个基础解系.